**Федеральное государственное образовательное**

**бюджетное учреждение**

**высшего образования**

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ**

**ФЕДЕРАЦИИ»**

**(Финансовый университет)**

**Факультет**

**информационных технологий и анализа больших данных**

**Направление «Прикладная математика и информатика»**

**Домашнее задание № 7**

«Метод отсекающих плоскостей»

Студенты группы ПМ19-3:

Захаров Д. В.

Исмоилова М. В.

Константинов К. Л.

Мосолова К. Д.

Самофалова Т. А.

Руководитель:

Аксенов Дмитрий Андреевич

**Москва 2022**

**Физическая модель**

Стартапу «Рога и копыта» необходимо определять оптимальное число станков для покупки на различные заводы. Данную задачу можно отнести к задачам целочисленной оптимизации и для ее решения было предложено использовать метод ветвей и границ. Была написана и протестирована функция, замерено время выполнения, сделаны выводы и предложены варианты дальнейшего развития проекта.

**Математическая модель**

Задача линейного программирования имеет вид:

(1)

Здесь c, b – векторы, А – матрица, все элементы которых являются целыми числами.

Если убрать условие о целочисленности, то можно получить задачу линейного программирования, которая решается симплекс-методом.

Для решения основной задачи симплекс-методом она должна быть приведена к канонической задаче путем введения в каждое ограничение по одной дополнительной переменной: в каждое ограничение вводится дополнительная переменная со знаком «+» (она становится базисной, т.е. входит только в одно уравнение из системы с коэффициентом 1, а во все остальные с коэффициентами, равными нулю).

Каноническая задача записывается следующим образом:

(2)

Для решения задачи (2) удобно использовать таблицу (3).

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

В первой строке перечисляют все переменные;

В первом столбце указывают номера базисных переменных, а в последней ячейке – букву Z (это строка функционала).

В «середине таблицы» указывают коэффициенты матрицы ограничений — aij.

Последний столбец – вектор правых частей соответствующих уравнений системы ограничений.

Крайняя правая ячейка – значение целевой функции. На первой итерации ее полагают равной 0.

После преобразований в таблице получим точку экстремума. В общем случае ее координаты не будут целыми числами, и тогда необходимо прибегнуть к методу Гомори или методу ветвей и границ для поиска решения, удовлетворяющему задаче (1).

Метод ветвей и границ получил свое название из-за ветвления текущей на задачи на две подзадачи. Целью этого ветвления является разбиение множества допустимых решений на два подмножества путем построения дополнительных ограничений таким образом, чтобы сделать решение хотя бы по одной из подзадач целочисленным.

**Алгоритмы:**

**Метод ветвей и границ:**

1. Решается задача (1) симплекс-методом без учета условия целочисленности. Для этого можно воспользоваться уже реализованной в библиотеке scipy.optimize функцией linprog(method=’simplex’).

2. Проверяется, является ли найденная точка целочисленной. Если да, поиск окончен. Если нет, переходим к следующему шагу.

Стоит заметить, что у задачи (1) без условия целочисленности может не быть решения. Тогда, если симплекс-метод не нашел оптимальную точку, выдается соответствующее предупреждение.

3. Задача делится на две подзадачи: ЗЛП-1 и ЗЛП-2. Для этого среди координат найденной точки находится та, дробная часть которой является наименьшей. К условиям из предыдущей задачи добавляется ограничение для ЗЛП-1 и ограничение для ЗЛП-2.

4. Полученные подзадачи решаются симплекс-методом.

* Если найденная точка целочисленная и не противоречит условиям задачи (1), то она заносится во множество оптимальных решений исходной задачи.
* Если найденная точка целочисленная, но противоречит условиям задачи (1), то данная «ветвь» обрубается и осуществляется переход к другой «ветке» задач.
* Если координаты найденной точки не целые, пункты 3-4 снова повторяются: новое ограничение прибавляется к уже существующим ограничениям этой задачи.

5. Когда все «ветви» будут проверены, из множества выбирается та точка, значение в которой целевой функции будет минимально. Если множество окажется пустым, то задача (1) не имеет решения.

**Варианты использования**

ВИ1 пользователь хочет найти экстремум функции при помощи метода Гомори.

1. Пользователь использует функцию branche\_boundaries

2. В качестве основных параметров передается

A. Функция в явном виде

B. Список строк с ограничениями

3. В качестве выходного параметра пользователь получает список координат точки экстремума

**Архитектура решения.**

branche\_boundaries – функция, решающая задачу целочисленного линейного программирования методом полного перебора ( Метод ветвей и границ)

Параметры:

F: str

Функция в виде строки

constraint: list

Список строк с ограничениями

**Тестирование**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***№ Теста*** | ***Получен результат*** | ***Верный результат*** | ***Время*** |
| 1 | [6., 0.] | [6, 0] | 1.47 ms |
| 2 | “Ядро умерло” | [1, 1] | Время умирать |
| 3 | [2., 1.] | [2, 1] | 1.74 ms |
| 4 | [1., 4.] | [1, 4] | 3.1 ms |
| 5 | [0., 0.] | [0, 0] | 2.85 ms |
| 6 | [1., 3.] | [1, 3] | 930 µs |
| 7 | [1., 3.] | [1, 3] | 2.81 ms |
| 8 | [2., 0.] | [2, 0] | 2.94 ms |
| 9 | [3., 0.] | [3, 1] | 1.98 ms |
| 10 | [0., 7.] | [0, 7] | 3.01 ms |

Метод ветвей и границ в 80% случая дал нам правильный результат, однако, существуют примеры, где получить ответ либо вовсе не удаётся, либо получаем неверный (близкий к истинному). Время работы – приемлемое, максимально зафиксированное = 3,01 мс.

Хотелось бы сравнить с методом отсекающих плоскостей? Нам всем тоже.

**Заключение**

Таким образом, исходя из всего вышеперечисленного, метод Ветвей и границ решает поставленную задачу, но не так хорошо, как хотелось бы. Дальнейшее развитие предполагает реализацию метода Гомори, сравнения с ним и выбор оптимального решения.